

Revisiting the Cost of Business Cycles: A Demand Shock Channel

Hyung Seok Kim * Se Min Joo †

Abstract This paper estimates the welfare cost of the US business cycle episodes over the period 1964–2018. Under the restriction of a balanced growth path, the representative consumer in a frictionless, competitive business cycle world would reduce GDP by around 1.3 percent each year to eliminate business cycle risk; our estimates are comparable to the benefits of stabilization by Barro (2009). The key to these results is augmentation with investment-specific shocks à la Fisher (2006) to a standard business cycle model.

Keywords Welfare Cost, Business Cycles, Investment-specific Technology Shocks

JEL Classification E13, E32, E60, D69

*Corresponding Author, Assistant Professor, Graduate School of Science and Technology Policy, KAIST, 291 Daehak-ro, Yuseong-gu, Daejeon 34141, Korea, e-mail: hyung.seok.kim@kaist.ac.kr

†Ph.D Student, Department of Economics, Graduate School of Sogang University, Baekbeom-Ro (Sinsu-Dong), Mapo-Gu, Seoul 04107, Korea, e-mail: sewoogi@naver.com

수요충격을 고려한 경기변동의 후생비용

김형석* 주세민†

Abstract

본 연구에서는 1964년에서 2018년 사이 미국경제의 경기변동에 관한 후생비용을 추정하였다. 균형성장경로(Balanced Growth Path) 제약조건하에서 경기변동의 후생비용은 중립기술의 평균성장률 및 변동률, 투자기술의 평균성장률 및 변동률, 경제주체의 위험회피계수의 정도에 따라 변동됨을 논증하였다. 중립기술과 투자기술을 모두 고려한 경제에서 대표적 소비자의 위험회피계수가 4인 경우 연간 후생비용은 1.3% 수준으로 Barro(2009)가 제시한 통상적인 거시안정화 정책의 후생편익과 근사한다. 그러나, 1982년 이후에는 중립기술과 투자기술의 변동으로 인한 후생비용이 이전에 비하여 절반 이하로 줄어들었음을 알 수 있었다.

Keywords 후생비용, 경기변동, 수요충격, 투자기술충격

JEL Classification E13, E32, E60, D69

*교신저자, KAIST 과학기술 정책대학원 교수, e-mail:hyung.seok.kim@kaist.ac.kr

†서강대학교 박사과정, e-mail: sewoogi@naver.com

1. 서론

Lucas(1987)는 그의 저서 ‘Models of Business Cycles’에서 경기 변동으로 인한 연간 후생비용 또는 정부의 거시안정화 정책으로 인한 대표적 소비자의 후생편익은 매우 미미함을 논증하였다.¹ 즉, 연간 5천만원 가치의 소비지출 또는 소득을 올리는 가게의 경우, 경기변동으로 인한 후생비용 또는 정부의 거시안정화 정책으로 인한 후생편익은 스타벅스 커피 한 잔의 가격(4천원 기준)에 불과함을 보였다. 이러한 Lucas(1987)의 선구적 연구 이래로 거시안정화정책의 후생편익에 관해 방대한 연구가 촉발되었는데, 후생편익의 크기를 추정함에 있어 여전히 다양한 관점이 존재한다. 특히 Lucas(1987)의 ‘사고실험’과 달리, 경제주체가 소비, 저축을 내생적으로 결정하고 경기변동의 주된 원인이 중립적 기술충격(Hicks-neutral technology shocks 또는 TFP shocks)에 의해 발생하는 경기변동 모형으로 후생편익을 추정하는 경우, 후생편익은 사실상 영 또는 음의 크기를 보임으로써, 거시안정화 정책의 실효성은 존재하지 않음을 도출할 수 있다(Cho, Cooley and Kim (2014), 이하 CCK).

본고에서는 경제주체의 내생적 소비, 저축 결정을 고려하되, 기존연구와는 달리 중립적 기술충격으로 대표되는 공급측면의 충격뿐만 아니라, 수요측면의 충격, 즉 투자에 관한 기술 성장 충격(Investment-specific Technology Growth Shocks)을 반영하여 1964년에서 2018년사이 미국경제의 후생비용을 추정하였다. Figure 1은 1964년 1분기부터 2018년 3분기까지 투자재의 실질가격 지수²를 도시한 결과이다. 데이터가 가용한 1964년 이후 시계열 데이터는 크게 두 번의 큰 변화가 있다고 판단되었으며, 그에 따라 세 개의 샘플구간으로 나누어 살펴볼 필요가 있다. 첫 번째 구간은 1964년 1분기부터 1982년 2분기이고 두 번째 구간은 1982년 3분기부터 2007년 3분기이며 세 번째 구간은 2007년 4분기부터 최근까지의 구간이다. 이 기준은 Figure 1의 세로 선으로 표기하였다. 1982년 3분기 기준은 선행 연구인 Fisher(2006)에 따라 정의하였는데, 그 이유는 그 전후로 투자재 가격이 급격하게 하락하기 시작하였으며, 재정정책, 거시 변동성과 규제 환경에 변화가 있었기 때문이다.

두 번째 기준인 2007년 4분기 이후는 금융위기 발생한 전과 후를 비교하였을때 순간적인 투자재 가격 상승과 함께 그 이후 투자재 가격의 하락 속도가 둔화되었기 때문에 별도 구간으로 살펴보았다. 1982년 3분기를 지나면서 투자재 가격이 급격하게 떨어졌으며, 2008년 금융 위기가 지난 이후 추세가

¹ 대표적 소비자의 경기변동 후생비용과 거시안정화 정책의 후생편익은 동일한 개념이다. 본고에서는 ‘후생비용’과 ‘후생편익’을 동의어로 쓰고자 한다.

² 투자 가격 지수(Investment price Index for equipments, 2012=100)를 가격 디플레이터(the price deflator of the non-farm business sector)로 정규화하여 산출함(출처:NIPA).

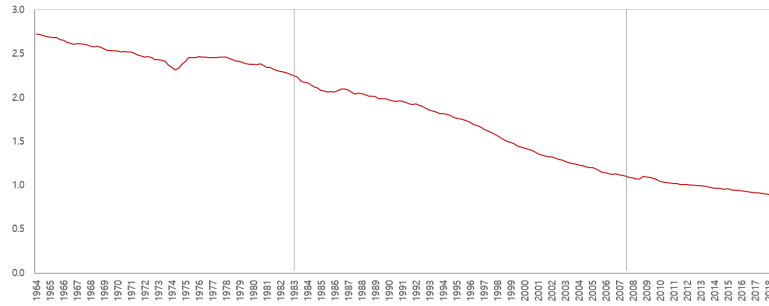


그림 1: 투자재 실질 가격 지수(US : 1964 1Q ~ 2018 3Q)

완만해짐을 볼 수 있다.

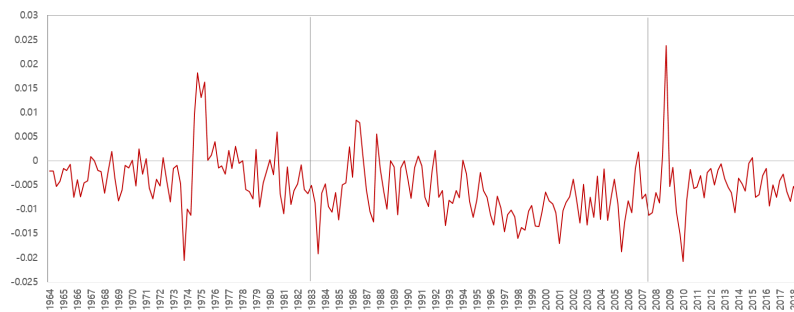


그림 2: 투자재 실질 가격 성장률 (US : 1964 1Q ~ 2018 3Q)

Figure 2를 참조하면, 투자기술의 변동성이 크게 나타나는 구간을 볼 수 있는데, 1973년부터 1975년까지의 급격한 변동은 72년까지 지나친 경기과열로 인한 긴축재정 정책이 이루어진 기간이며, 2008년부터 2010년은 금융 위기가 발생한 기간이다. 중립기술의 성장률³에 대한 Figure 3을 살펴보면, 중립기술의 변동성은 1982년 이전에 매우 컸음을 알 수 있다. 또한, 73~75년 4차 중동전 발발로 인한 유가 급등 및 베트남 전쟁, 1980년 상반기 2차 오일쇼크, 1990년 부동산 경기 침체, 2001년 IT버블 붕괴 및 911테러, 2008년 금융위기 시점에

³중립기술의 순성장률은 $\log \frac{A_t}{A_{t-1}} = \log \frac{Y_t}{Y_{t-1}} - \alpha \log \frac{K_t}{K_{t-1}} - (1 - \alpha) \log \frac{H_t}{H_{t-1}}$ 식을 이용하여 계산하였다. Y_t 는 일인당 실질 GDP, K_t 는 일인당 자본축적(실질), H_t 는 일인당 주평균 노동시간으로 FRED(<https://fred.stlouisfed.org/>)의 데이터를 활용하였다.

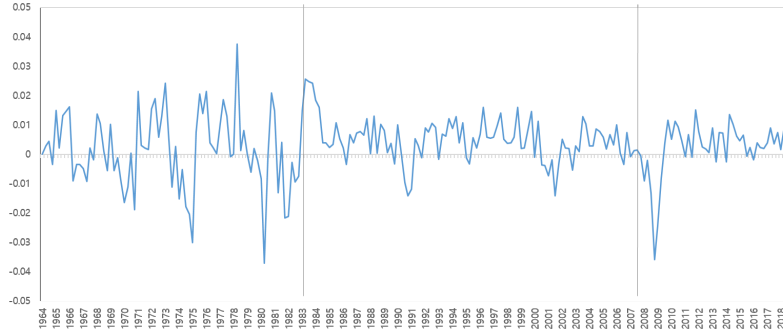


그림 3: 중립기술 성장률 (US : 1964 1Q ~ 2018 3Q)

서 중립기술 성장률이 낮아짐을 볼 수 있다. 투자기술과 중립기술의 성장률과 변동성은 Table 1에 정리하였다.

		평균	표준편차
전체구간	투자기술 성장률	-0.5128	0.5998
	중립기술 성장률	0.3096	1.0130
		평균	표준편차
구간1	투자기술 성장률	-0.2582	0.5691
	중립기술 성장률	0.1623	1.3240
		평균	표준편차
구간2	투자기술 성장률	-0.7333	0.5366
	중립기술 성장률	0.4673	0.7388
		평균	표준편차
구간3	투자기술 성장률	-0.4721	0.5988
	중립기술 성장률	0.2166	0.9242

표 1: 미국 시계열 구간별 투자기술 성장률과 중립기술 성장률의 평균 및 표준편차 (%) : 전체구간(64.1Q ~ 18.3Q), 구간1(64.1Q ~ 82.2Q), 구간2(82.3Q ~ 07.3Q), 구간3(07.4Q ~ 18.3Q)

후생비용(후생편익)을 추정하기 위해, 첫째 위험회피계수가 1보다 큰 경우, 중립적 기술성장충격, 투자수요기술성장 충격이 균형성장경로(Balanced Growth Path)를 유도하는 효용함수를 선택하고, 둘째 Table 1의 실증자료를 기반으로 Cooley and Prescott(1995)의 성장률을 고려한 모수추정(calibration)을 실행하였다.⁴ 추정 결과, 균형성장경로(Balanced Growth Path) 제약조건하에서 경기변동의 후생비용은 공급 측면 기술충격 성장률의 평균 및 표준편차, 수요측면 기술충격 성장률의 평균 및 표준편차, 경제주체의 위험회피계수의 정도에 따라 변동됨을 논증하였다. 특히 대표적 소비자(Representative Consumer)의 위험회피계수가 4인 경우, Barro(2009)가 제시한 통상적 거시안정화 정책의 후생편익의 60% 이상을 설명할 수 있음을 보였다.⁵

2장에서는 중립생산기술과 투자생산기술이 성장하는 모형을 정의하였으며 3장에서는 구조적 모수 설정 및 실험 설계를 하였다. 4장은 3장에서 정의된 구조적 모수 설정 및 실험 설계에 따라 미국 시계열 데이터에서 구간별 나타나는 성장률과 변동성을 기반으로 후생 비용을 측정하고 결과를 검토하였다. 5장은 연구 결과 요약 및 향후 연구 과제에 대한 방향성을 제안하였다.

2. 모형

2.1. 대표적 경제주체의 효용 극대화 문제 정의

대표적 경제주체 (Representative Agent)의 평생 효용 극대화 문제는 아래와 같다.

$$\max E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(C_t, H_t) \quad (1)$$

$$s.t \quad C_t + I_t = Y_t, \quad (2)$$

$$Y_t = A_t K_t^\alpha H_t^{1-\alpha} \quad (3)$$

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + Z_t I_t, \quad (4)$$

⁴ 위험회피계수가 1인 경우, 본고에서 고려된 모형은 Fisher(2006)와 정확히 일치한다. 본고의 모형은 Fisher(2006)의 모형을 균형성장경로에서 위험회피계수가 1보다 큰 경우로 확장한 것으로 볼 수 있다.

⁵ Barro는 경제 성장률의 크기와 변동성에 의하여 발생하는 후생비용을 2차 세계대전 이후 (1880년~)의 데이터를 기준으로 추정하였다. 특히 미국을 비롯한 OECD국가의 시계열 자료를 활용하여 1800년 이후 GDP가 15% 이상 감소하는 '재난적 위기 위험(disaster risk)'을 식별, 거시안정화 정책의 후생편익을 계산하였다. Barro(2009)는 2차 세계대전 이후 미국의 후생편익을 연간 1.5%로 추정하였다.

C_t, H_t, I_t, Y_t, K_t 는 각각 소비, 노동, 투자, 생산, 자본이며, A_t, Z_t 는 각각 중립기술, 투자기술이다. 효용함수 $U(C_t, H_t)$ 는 콥 더글러스 형태로, 위험기피계수에 따라 다르게 정의된다.

$$U(C_t, H_t) = \frac{1}{1-\sigma} \left(C_t^\theta (1-H_t)^{1-\theta} \right)^{1-\sigma}, \quad \text{when } \sigma \neq 1$$

$$= \theta \log(C_t) + (1-\theta) \log(1-H_t), \quad \text{when } \sigma = 1$$

C_t, H_t 에 대한 일계조건으로 소비와 노동의 한계 효용 동일 조건(5)이 도출될 수 있으며, K_{t+1} 에 대한 일계조건에서 오일러 식(6)이 도출될 수 있다.

$$(1-\theta)C_t - \theta(1-H_t)(1-\alpha)A_t K_t^\alpha H_t^{-\alpha} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{1}{Z_t} = \mathbb{E}_t \beta \left(\alpha A_{t+1} K_{t+1}^{\alpha-1} H_{t+1}^{1-\alpha} + \frac{1-\delta}{Z_{t+1}} \right) \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{\theta(1-\sigma)-1} \left(\frac{1-H_{t+1}}{1-H_t} \right)^{(1-\theta)(1-\sigma)} \quad (6)$$

여기서 A_t, Z_t 는 각각 중립생산기술과, 투자생산기술로써 아래와 같이 확정적 성장(deterministic trend) 요소가 존재하는 확률 과정이다.

$$\ln A_{t+1} = \ln A_t + \gamma + \varepsilon_{a,t}. \quad (7)$$

$$\ln Z_{t+1} = \ln Z_t + \nu + \varepsilon_{z,t}. \quad (8)$$

γ, ν 는 각각 중립생산기술과 투자생산기술의 확정적 성장 요소이며, $\varepsilon_{a,t}, \varepsilon_{z,t}$ 는 i.i.d(Independent and identically distributed) 프로세스를 따른다.

2.2. 균형성장경로(Balanced Growth Path) 조건 검토

본 모형은 성장을 고려하였기 때문에 시스템이 균형성장경로를 따르기 위한 제약조건을 검토하여야 한다. Fisher는 위험중립적인 효용함수에서의 균형성장경로를 검토하였지만, 여기서는 복수의 성장요소가 존재하는 경제에서 위험기피계수 변화에 따른 후생 비용을 검토하여야 하기 때문에 효용함수 교체에 따른 균형성장경로를 따르는지 여부를 별도로 검토할 필요가 있다. 균형 성장을 이룬다는 것은 각 거시변수 Y_t, C_t, I_t, K_t 의 정상상태 성장 (Steady-state

growth)이 일정한 비율을 (constant growth rate) 따른다는 것을 의미하며, 여기서는 King, Plosser and Rebelo(1988, 2002, 이하 KPR)에 의하여 제시된 방법론을 활용하였다. KPR에 의하면 정상상태 성장을 위해서는 두 가지 제약조건을 검토해야 한다. 첫 번째는 일계조건의 기술적 제약조건이며, 두 번째는 효용함수에 대한 제약조건이다.

2.2.1 일계조건의 기술적 제약조건 검토

일계조건의 양변이 장기균형(long-run equilibrium)을 이루기 위하여 양변의 기대 성장률(expected growth rate)이 같아야 한다. 식 (3)에서 각 변수들의 순증가율(Net growth rate)를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{Y_{t+1}}{Y_t}\right) &= \ln\left(\frac{A_{t+1}}{A_t}\right) + \alpha \ln\left(\frac{K_{t+1}}{L_t}\right) + (1-\alpha) \ln\left(\frac{H_{t+1}}{H_t}\right) \\ \rightarrow g_t^{n,Y} &= g_t^{n,A} + \alpha g_t^{n,K} + (1-\alpha)g_t^{n,H} \\ \rightarrow g_t^{n,Y} &= g_t^{n,A} + \alpha g_t^{n,K} \end{aligned} \quad (9)$$

$g_t^{n,X}$ 는 변수X의 순증가율을 뜻한다. 식 (9)은 노동시간의 정상상태 증가율 $g_t^{n,H}$ 은 0 임을 반영하였다.

식 (4)에서

$$\begin{aligned} \left(e^{g_t^{n,K}} - 1 + \delta\right) K_t &= Z_t I_t \\ \rightarrow g_t^{n,K} &= g_t^{n,Z} + g_t^{n,I} \end{aligned} \quad (10)$$

식 (2)에서 장기 균형에서 소비, 투자, 생산의 성장률은 동일함을 알 수 있다.

$$g_t^{n,C} = g_t^{n,I} = g_t^{n,Y} \quad (11)$$

식 (9), (10), (11)에서 각 변수의 정상상태 성장률은 식 (12), (13)의 조건을 만족해야 한다.

$$g_t^{n,C} = g_t^{n,I} = g_t^{n,Y} = \frac{1}{1-\alpha} g_t^{n,A} + \frac{\alpha}{1-\alpha} g_t^{n,Z} \quad (12)$$

$$g_t^{n,K} = \frac{1}{1-\alpha} g_t^{n,A} + \frac{1}{1-\alpha} g_t^{n,Z} \quad (13)$$

2.2.2 효용함수에 대한 제약조건 검토

균형성장경로 만족을 위한 효용함수 제약조건을 검토한다. 만약 다른 균형 조건이 정상상태 성장 조건을 만족한다고 할지라도 효용이 실현 가능한 정상 상태를 만족하지 않으면 경쟁적 균형(competitive equilibrium)을 보장할 수 없다. 즉, 효용이 시간에 따라서 정상상태를 만족할 수 있는지를 검토해야 한다. 이를 위해서 시점간 대체 탄력성 (EIS : Elasticity of intertemporal substitution) 이 일정해야 한다. $-\frac{u_{cc}(C_t, H_t)C_t}{u_c(C_t, H_t)}$ 가 일정한지 여부를 검토한다.

$$-\frac{U_{cc}(C_t, H_t)C_t}{U_c(C_t, H_t)} = \theta(\sigma - 1) + 1 \tag{14}$$

즉, 성장이 있는 경우에도 시점간 대체 탄력성은 일정하다. 따라서 균형성장경로를 만족하기 위한 효용함수 제약을 만족한다. 균형성장경로를 따르기 위한 조건을 요약하면, 효용함수 제약은 만족하기 때문에, 정상상태의 성장률은 식 (12), (13)만을 고려하면 된다는 것이다.

2.3. 안정적 시스템으로 변환

성장요소가 존재하는 모형은 안정적(Stationary)이지 않기 때문에, 안정적 인 시스템으로 변환하기 위하여 원 시스템의 추세가 제거된 새로운 변수를 정의한다. 2.2.1장에서 검토한 변수별 성장률을 고려하여 $y_t = \frac{Y_t}{Q_t}, c_t = \frac{C_t}{Q_t}, i_t = \frac{I_t}{Q_t}, k_t = \frac{K_t}{Q_{t-1}Z_{t-1}}$ 을 활용한다. 여기서 $Q_t = (A_t)^{\frac{1}{1-\alpha}}(Z_t)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$ 이다. 소문자로 정의된 변수는 원계열에서 추세가 제거된 안정화된 변수임을 의미한다. 원시스템의 식 (2), 식 (3), 식 (4), 식 (5), 식 (6), 식 (7), 식 (8)을 안정화시키면 다음과 같다.

$$c_t + i_t = y_t, \tag{15}$$

$$(g_t^A)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(g_t^Z)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}y_t = k_t^\alpha H_t^{1-\alpha} \tag{16}$$

$$(g_t^A)^{\frac{1}{1-\alpha}}(g_t^Z)^{\frac{1}{1-\alpha}}k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + (g_t^A)^{\frac{1}{1-\alpha}}(g_t^Z)^{\frac{1}{1-\alpha}}i_t, \tag{17}$$

$$(1 - \theta)(g_t^A)^{\frac{1}{1-\alpha}}(g_t^Z)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}c_t - \theta(1 - H_t)(1 - \alpha)k_t^\alpha H_t^{-\alpha} = 0 \quad (18)$$

$$1 = \mathbb{E}_t \beta \left(\alpha g_{t+1}^A k_{t+1}^{\alpha-1} H_{t+1}^{1-\alpha} + \frac{1 - \delta}{g_{t+1}^Z} \right) \left((g_{t+1}^A)^{\frac{1}{\alpha}} (g_{t+1}^Z)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{\theta(1-\sigma)-1} \left(\frac{1 - H_{t+1}}{1 - H_t} \right)^{(1-\theta)(1-\sigma)} \quad (19)$$

$$\ln g_{t+1}^A = \gamma + \varepsilon_{a,t}; \quad (20)$$

$$\ln g_{t+1}^Z = \nu + \varepsilon_{z,t}. \quad (21)$$

$g_t^A = \frac{A_t}{A_{t-1}}, g_t^Z = \frac{Z_t}{Z_{t-1}}$ 으로 A_t, Z_t 의 총성장률(gross growth rate)이다.

2.4. 후생비용 정의

불확실성이 존재하지 않는 기준 체제에 대한 불확실성이 존재하는 대안 체제의 후생비용은 기준 체제에서의 소비자들이 대안 체제를 채택함으로써 포기할 의향이 있는 소비의 비중으로 정의될 수 있다. 이러한 후생비용을 λ 라고 하면, 식 (22)으로 정의될 수 있다. 변수들의 위 첨자 r 은 기준 체제(reference system), a 는 대체 체제 (alternative system)를 의미한다.

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U((1 - \lambda)C_t^r, H_t^r) = \mathbb{E} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(C_t^a, H_t^a) \quad (22)$$

C_t^r, C_t^a 의 확정적 추세 (deterministic trend) Q_t^d 를 분리해낸 변수를 c_t^r, c_t^a 라고 하자. 위 첨자 d 는 불확실 성분을 제외한 확정적 (deterministic) 성분임을 뜻하며, 소문자는 추세가 제거된 안정된 변수임을 의미한다. 한편 확정적 추세는 식 (23)과 같이 중립기술과 투자기술의 확정적 추세인 γ, ν 에 대한 식으로 표현할 수 있다.

$$Q_t^d = \left(A_t^d \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(Z_t^d \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \left(A_0 e^{\gamma t} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(Z_0 e^{\nu t} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = e^{\left(\frac{\gamma}{1-\alpha} + \frac{\nu\alpha}{1-\alpha} \right) t} \quad (23)$$

$c_t^r = \frac{C_t^r}{Q_t^d}, c_t^a = \frac{C_t^a}{Q_t^d}$ 관계와 식 (23)을 이용하면, 식 (22)은 아래 식 (24)과 같이 변경할 수 있다.

$$\begin{aligned}
& (1-\lambda)^{\theta(1-\gamma)} \sum_{t=0}^{\infty} (\beta^*)^t \frac{1}{1-\sigma} \left((c_t^r)^\theta (1-H_t^r)^{1-\theta} \right)^{1-\sigma} \\
&= \mathbb{E} \sum_{t=0}^{\infty} (\beta^*)^t \frac{1}{1-\sigma} \left((c_t^a)^\theta (1-H_t^a)^{1-\theta} \right)^{1-\sigma} \\
&\rightarrow (1-\lambda)^{\theta(1-\gamma)} v^{*,r} = \mathbb{E} v^{*,a}
\end{aligned} \tag{24}$$

v^* 는 안정화된 체제에서 $\beta \rightarrow \beta^* = \beta e^{\left(\frac{\gamma}{1-\alpha} + \frac{\nu\alpha}{1-\alpha}\right)\theta(1-\sigma)}$ 로 변경된 경제의 가치함수 (value function)이다. 아래 첨자 t 가 없는 $\mathbb{E}v^{*,a}$ 는 $v^{*,a}$ 의 무조건적 평균 (unconditional mean) 또는 에르고딕 분포의 평균(Ergodic Mean)을 뜻한다. v_t^* 는 다음을 만족한다.

$$v_t^* = \frac{1}{1-\sigma} \left((c_t)^\theta (1-H_t)^{1-\theta} \right)^{1-\sigma} + \beta^* \mathbb{E}_t v_{t+1}^* \tag{25}$$

한편, 기준체제에서 변수값은 정상상태에서 일정하므로, $c_t^r = c^r$, $H_t^r = H^r$ 로 쓸 수 있다. 따라서, 식 (24)의 후생비용 λ 는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\lambda = 1 - \left[\frac{\mathbb{E}v^{*,a}}{v^{*,r}} \right]^{\frac{1}{\theta(1-\sigma)}} \tag{26}$$

2.5. 후생비용 근사 (approximation)

후생 비용을 계산하기 위해서는 식 (26)에서 보인 바와 같이 가치함수를 알아야 한다. 가치함수를 구하는 방법으로는 가치함수 반복(value function iteration)이 있으나 수렴하는 데 매우 오래 걸리기 때문에 섭동법(perturbation method)이 자주 활용된다. Fernández-Villaverde, Rubio-Ramírez, Schorfheide(2016)는 가치함수를 섭동법으로 도출하고 이를 이용하여 재귀적 효용함수(recursive preference)나 후생비용 계산에 활용하는 예시를 상세히 설명하였다. 식을 간단히 하기 위해 중립기술만 존재하는 경제를 기반으로 2차 섭동법을 살펴보고자 한다. 가치함수는 현재 상태변수 K_t, A_t 에 의존하기 때문에 $V(K_t, A_t; \sigma_p)$ 의 섭동해(perturbation solution)를 구하는 것이 목적이다. 여기서 σ_p 는 섭동 파라미터 (perturbation parameter)이다. 확정적 상태 $(K, 0; 0)$ 주변에서의 가치함수의 2차 테일러 전개는 식 (27)과 같다.

$$\begin{aligned}
V(K_t, A_t; \sigma_p) = & V_{ss} + V_{1,ss}(K_t - K) + V_{2,ss}A_t + V_{3,ss}\sigma_p \\
& + \frac{1}{2}V_{11,ss}(K_t - K)^2 + V_{12,ss}(K_t - K)A_t + V_{13,ss}(K_t - K)\sigma_p \\
& + \frac{1}{2}V_{22,ss}A_t^2 + V_{23,ss}A_t\sigma_p + \frac{1}{2}V_{33,ss}\sigma_p^2 \quad (27)
\end{aligned}$$

where :

$$\begin{aligned}
V_{ss} &= V(K, 0; 0) \\
V_{i,ss} &= V_i(K, 0; 0) \quad \text{for } i = \{1, 2, 3\} \\
V_{ij,ss} &= V_{ij}(K, 0; 0) \quad \text{for } i, j = \{1, 2, 3\}
\end{aligned}$$

$V_{ss}, V_{i,ss}, V_{ij,ss}$ 는 테일러 전개식의 계수이며, 불확실성이 없는 경제에서는 $V_{3,ss} = V_{13,ss} = V_{23,ss} = 0$ 이 성립한다. 한편, 섭동파라미터가 1인 경우는 식 (28)와 같이 축약될 수 있다.

$$\begin{aligned}
V(K_t, A_t; \sigma_p) = & V_{ss} + V_{1,ss}(K_t - K) + V_{2,ss}A_t \\
& + \frac{1}{2}V_{11,ss}(K_t - K)^2 + \frac{1}{2}V_{22,ss}A_t^2 + \frac{1}{2}V_{33,ss}\sigma_p^2 \quad (28)
\end{aligned}$$

식 (28)에서 주의해야 할 점은 $V_{33,ss} \neq 0$ 이라는 것이다. 만약 불확실성이 제거된 확정적 정상상태 (deterministic steady state)의 경우, 즉 $K_t = K, A_t = 0$ 을 만족하면, 가치함수는 식 (29) 같이 쓸 수 있다.

$$V(K, 0; \sigma_p) = V_{ss} + \frac{1}{2}V_{33,ss}\sigma_p^2 \quad (29)$$

여기서 $\frac{1}{2}V_{33,ss}\sigma_p^2$ 는 경기변동에 의한 후생이다⁶. 여기서 주의해야 할 점은 변동으로 인한 추가적인 후생은 반드시 음수인 것은 아니다. CCK(2014)은 경기변동이 후생에 주는 효과를 평균효과(mean effect)와 변동효과(fluctuation)로 나누어 후생 이득이 발생하는 경우는 경기변동을 이롭게 이용하는 에이전트의 평균효과가 변동효과보다 큰 결과라고 설명하였다.

⁶양수일때는 후생이득, 음수일때는 후생비용이다. 단, 상태변수가 정상상태에 머무른다는 조건하의 후생 이득 또는 비용(conditional welfare gain or cost)이다.

3. 시뮬레이션

3.1. 구조적 모수 설정 (Calibration)

성장요소가 없는 모형 또는 성장요소가 있더라도 위험기피계수가 고정된 모형과는 달리, 성장 요소가 존재하는 경제에서 위험기피 계수가 변동되는 모형을 다루는 경우 성장요소나 위험기피계수에 따른 구조적 모수 설정을 변경해야 한다. 예를 들어, 식 (19)에서 k_t 의 정상상태의 해 \bar{k} 는 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$\bar{k} = \left[\left\{ \frac{1}{\beta} (\bar{g}^A)^{\frac{1}{\alpha}(-\theta(1-\sigma)+1)} (\bar{g}^Z)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}(-\theta(1-\sigma)+1)} - \frac{1-\delta}{\bar{g}^Z} \right\} \frac{1}{\alpha \bar{g}^A} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} \bar{H} \quad (30)$$

식 (30)의 우변의 첫번째 항을 참조하면 성장요소가 없는 모형 또는 성장요소가 있더라도 위험기피중립적인 모형과 달리 정상상태에서의 자본량은 위험기피계수에 따라 변동된다. 식 (16)에서 알 수 있듯이 정상상태에서 자본의 증가는 α 비중만큼 생산의 증가에 기여하기 때문에, 위험기피 계수가 변화하면 자본과 생산이 다른 속도로 변화함을 알 수 있다. 이는 정상상태에서 $\frac{\bar{y}}{\bar{k}}$ 가 일정하다는 Kaldor의 정형적인 사실에 위배된다. 따라서, 위험기피계수가 변동됨에 따라 Kaldor의 정형적인 사실을 만족하는 구조적 모수 설정 결과값은 달라지게 된다. 본 연구에서는 Cooley and Prescott(1995)이 제시한 구조적 모수 설정 절차에 의한다. Cooley and Prescott은 미국데이터로부터 정상상태에서의 생산과 소비의 비율, 자본과 생산의 비율, 투자와 자본의 비율을 일정하게 만족하는 구조적 모수 설정 방법으로 제시하였다. Cooley and Prescott이 제시한 미국 경제의 정형적인 사실은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\bar{y}}{\bar{c}} &= 1.33 \\ \frac{\bar{k}}{\bar{y}} &= 3.32 \\ \frac{\bar{i}}{\bar{k}} &= 0.076 \end{aligned}$$

먼저 식 (17)에서 아래와 같은 정상상태 값들의 관계를 정의할 수 있다.

$$\left((\bar{g}^A)^{\frac{1}{1-\alpha}} (\bar{g}^Z)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{\bar{k}}{\bar{i}} + (1-\delta)(\bar{g}^Z)^{-1} \right) = (\bar{g}^A)^{\frac{1}{1-\alpha}} (\bar{g}^Z)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (31)$$

\bar{g}^A, \bar{g}^Z 는 데이터에서 추정할 수 있으며 (표1) 이를 활용하면 식 (31)에서 δ 를 구할 수 있다. 한편, 식 (18)에서 식 (32)과 같은 정상상태 관계식을 정의할 수 있으며, 이로써 θ 를 구할 수 있다.

$$\frac{1-\theta}{\theta} (\bar{g}^A)^{\frac{1}{1-\alpha}} (\bar{g}^Z)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \frac{\bar{c}}{\bar{y}} = \frac{1-\bar{H}}{\bar{H}} (1-\alpha) \quad (32)$$

식 (19)에서 정상상태 관계식 (33)을 도출할 수 있다.

$$\beta \left(\alpha \bar{g}^A \frac{\bar{y}}{\bar{k}} + (1-\delta)(\bar{g}^Z)^{-1} \right) = \left((\bar{g}^A)^{\frac{1}{\alpha}} (\bar{g}^Z)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \right)^{-\theta(1-\sigma)+1} \quad (33)$$

식(33)에 의하면 할인율 β 는 σ 값에 따라 변한다. 즉, 위험기피계수가 클수록 할인율은 작아진다. 이는 트렌드가 없는 경제를 기준모형이라고 할 때 트렌드가 존재하는 성장모형은 기준모형과 달리 위험기피계수에 따라서 할인율(β)에 변동이 존재하게 된다. 한편, Barro(2009)는 주식 프리미엄을 설명할 수 있는 모형은 $\sigma > 1$ 인 경우라고 하였으며, Barro(2009)는 $\sigma = 4$ 인 경우를 기반으로 구조적 모수 설정을 하였다. 따라서 여기서는 $\sigma = 2, 4$ 인 경우를 살펴보고자 한다.

구조적 모수	기준모형	성장모형 ($\sigma=2$)	성장모형 ($\sigma=4$)
δ	0.0250	0.0797	0.0797
β	0.9900	0.9646	0.9629
θ	0.3675	0.3702	0.3702

표 2: 구조적 모수 설정 결과

3.2. 실험 설계

첫 번째로 검토되어야 하는 것은 성장요소가 존재하지 않는 경제를 기준 모형(Benchmark model)으로 하여 성장요소가 있는 경우 후생비용에 어떠한 변화가 있는지를 살펴보는 것이다. 두 번째로 Table 1의 미국 시계열 구간에 따른 후생비용을 추정하여 비교하였다. 세 번째로는 중립기술 성장과 투자기술 성장의 영향을 나누어 살펴보기 위해서, ①성장률의 변동성에 따라 변화하는 후생 비용과, ②성장률의 변화에 따라 달라지는 후생 비용을 검토하였다. ①과 관련하여서는 2007년 4분기를 기준으로 (Case 1 : baseline), g_t^A 의 변동성이

제거되어 확정적 추세(Deterministic trend) 변화를 겪는 경우(Case 2)와 g_t^A 이 각각 확정적 추세 변화를 겪는 경우(Case 3)를 비교 검토하였다. ②와 관련하여서는 g_t^A 이 Case 1 (baseline)에 비하여 두배의 성장률을 보이는 경우(Case 4)와 g_t^A 이 두배의 성장률을 보이는 경우(Case 5)를 비교하였다. 이를 정리하면 Table 3와 같다.

	γ	ν	$SD(g_t^A)$	$SD(g_t^Z)$
Case 1 (baseline)	0.00217	-0.00472	0.00924	0.00599
Case 2	0.00217	-0.00472	0.0	0.00599
Case 3	0.00217	-0.00472	0.00924	0.0
Case 4	0.00433	-0.00472	0.00924	0.00599
Case 5	0.00217	-0.00944	0.00924	0.00599

표 3: 실험 설계

Case 1은 실험의 기준점(baseline)으로 g_t^A , g_t^Z 의 평균과 표준 편차는 각각 2007년 4Q 이후 데이터에서 추정된 값(Table 1, 구간3)을 채택하였다. Case 1 대비 Case 2과 Case 2는 각각 g_t^A , g_t^Z 이 확정적 추세 변화를 따르는 경우이며, Case 4와 Case 5는 각각 g_t^A , g_t^Z 의 성장률이 두 배로 증가하였을 경우이다.

4. 결과 및 검토

시뮬레이션은 2차 섭동법 (second order perturbation)과 3차 섭동법(third order perturbation)을 사용하였다. 2차 섭동법은 Stephanie Schmitt-Grohe and Martin Uribe(2004)가 제시한 방법을 활용하였고, 3차 섭동법은 Martin M. Andersen(2012)이 2차 섭동법을 확장하여 3차 섭동법을 사용하였는데 본 연구에서 활용하였다. 3차 섭동법까지 검토하여 활용한 첫 번째 이유는 기술 충격으로 인한 예비적 저축의 동기(Precautious saving motivation)가 효용함수의 3차 미분항으로 나타날 수 있기 때문에 해당 효과가 발생하는 경우 누락하지 않기 위함이며, 두 번째 이유는 측정 오차(Measurement error)를 줄이기 위함이다.

Table 4를 참조하면, 성장요소를 고려한 모형은 성장요소를 고려하지 않은 CCK의 기준모형(Benchmark model)에 비하여 후생이 감소함을 알 수 있다. 이는 Barlevy의 연구와 일맥상통하는 것으로 Lucas의 실험경제에서는 경기 변동이 후생 비용 발생에 큰 영향을 미치지 못하지만, 장기 성장율의 변동이 후생에 보다 큰 영향을 미친다는 것이다.

		$\sigma=2$	$\sigma=4$
기준모형	2차 섭동법	0.0162	0.0060
	3차 섭동법	0.0157	0.0048
		$\sigma=2$	$\sigma=4$
성장모형	2차 섭동법	-0.0458	-0.1701
	3차 섭동법	-0.0459	-0.1688

표 4: 기준모형(CCK : Benchmark model)과 성장모형의 후생이득 λ (%) 비교

Table 5는 Table 1에서 정의한 구간에 따라 후생이득을 계산한 결과이다. 1964년부터 2018년 3분기까지 연평균 후생비용은 약 0.8%이다. Barro는 2차 세계 대전 이후 1880년부터 2005년 전체 구간의 후생비용을 연간 1.5%으로 계산하였는데, 이는 Table 5의 구간1(64.1Q ~ 82.2Q)의 연간 후생비용 1.3% (분기별 -0.3308%, $\sigma = 4$)와 일맥상통한다. 82년 이후에는 후생비용이 연간 0.4 ~ 0.7% (분기 0.1115 ~ 0.1688%)로 줄어들었음을 알 수 있다.

Table 1을 참조하면, 중립기술 변동성이 구간 1에서 가장 크고(1.3240%) 구간2에서 감소하였으며(0.7388%) 구간3에서 다시 증가하였는데(0.9242%), 이 영향으로 인하여 구간1에서의 가장 큰 후생 비용이 발생하고 구간2에서 가장 낮은 후생 비용이 발생하였음을 추정할 수 있다.

중립기술과 투자기술의 영향을 분리하여 고찰하기 위하여 Table 3에서 설계한 실험을 진행하여 Table 6, Table 7에 정리하였다. 실험의 첫 번째 시사점은 모든 경우에 있어서 위험기피계수가 커질 수록 변동성 발생으로 인하여 후생이 감소한다는 것이다. Case 1 ~ Case 3까지 모든 경우에 있어서 일관적으로 나타나며, 이는 일반적인 직관과 일치한다. 두 번째 시사점은 중립 기술 변동성이 발생하는 후생 비용의 90% 이상을 차지한다는 것이다. Case 1과 Case 3을 비교하면, Case 1에서 투자기술의 변동이 제거된 Case 3의 후생 비용은 $\sigma = 2$ 일 때 102%(0.0462/0.0459), $\sigma = 4$ 일 때 91%(0.1549/0.1688) 수준임을 알 수 있다. 반면 Case 2를 참조하면 투자기술의 변동성은 위험기피계수가 작은 경우($\sigma = 2$) 오히려 후생이득을 발생시킬 수 있다. 투자기술의 변동성의 증가는 노동 시작에 직접적인 충격을 주지 않으며 노동의 무조건적 평균이 정상상태(0.3333)에서 크게 벗어나서 낮아지지 않는다. 이로 인하여 생산 및 소비의 위축으로 전이되지 않음을 알 수 있다. 다만, 위험기피계수가 커지면 ($\sigma = 4$)

		$\sigma=2$	$\sigma=4$
전체구간	2차	-0.0552	-0.2016
	3차	-0.0548	-0.2011
		$\sigma=2$	$\sigma=4$
구간1	2차	-0.0943	-0.3285
	3차	-0.0952	-0.3308
		$\sigma=2$	$\sigma=4$
구간2	2차	-0.0291	-0.1114
	3차	-0.0291	-0.1115
		$\sigma=2$	$\sigma=4$
구간3	2차	-0.0458	-0.1701
	3차	-0.0459	-0.1688

표 5: 미국 시계열 구간별 분기 후생 이득 (λ) (2차 및 3차 섭동법): 전체 구간 (64.1Q ~ 18.3Q), 구간1(64.1Q ~ 82.2Q), 구간2(82.3Q ~ 07.3Q), 구간3(07.4Q ~ 18.3Q)

기간별 대체효과가 작아지면서⁷ 불확실성에 투자가 감소하게 되며(0.1592 → 0.1590) 이로 인한 후생비용이 발생하게 된다. 세 번째 시사점은 Table 7를 참조하면, 중립기술과 투자기술의 트렌드의 증가는 후생비용 변동에 큰 영향을 주지 않는다는 것이다.

5. 결론

지금까지 중립기술과 투자기술이라는 두 가지 합성 성장요소가 존재하는 경제에서 각각의 성장률과 변동성이 후생 증감에 미치는 영향을 살펴보았다. 성장모형에서 성장성에 변동이 있는 경우, 단기 충격만 존재하는 경제에 비해 후생 비용은 더 크게 증가한다는 것은 알려져 있으며(Barlevy) 이는 합성성장 (composite growth)요인이 존재하는 경우에도 만족한다는 사실을 확인하였다. 추정 결과, 균형성장경로(Balanced Growth Path) 제약조건하에서 경기변동의

⁷본 연구에서 사용한 콕-더글라스 형태의를 효용함수의 경우 위험기피계수와 EIS가 역수 관계에 있다

		Case 1(baseline)		Case 2		Case 3	
		$\sigma=2$	$\sigma=4$	$\sigma=2$	$\sigma=4$	$\sigma=2$	$\sigma=4$
λ (%)	2차	-0.0458	-0.1701	0.0009	-0.0154	-0.0466	-0.1548
	3차	-0.0459	-0.1688	0.0009	-0.0147	-0.0462	-0.1549
$\mathbb{E}[c_t]$	2차	0.4931	0.4921	0.4937	0.4935	0.4932	0.4923
	3차	0.4931	0.4921	0.4937	0.4936	0.4932	0.4923
$\mathbb{E}[i_t]$	2차	0.1582	0.1567	0.1592	0.1590	0.1583	0.1570
	3차	0.1582	0.1567	0.1592	0.1590	0.1583	0.1570
$\mathbb{E}[y_t]$	2차	0.6546	0.6523	0.6560	0.6557	0.6547	0.6527
	3차	0.6546	0.6523	0.656	0.6557	0.6547	0.6527
$\mathbb{E}[H_t]$	2차	0.3331	0.3327	0.3333	0.3333	0.3331	0.3328
	3차	0.3331	0.3327	0.3333	0.3333	0.3331	0.3328
$\mathbb{E}[k_t]$	2차	2.1677	2.1501	2.1778	2.1753	2.1683	2.1532
	3차	2.1677	2.1503	2.1778	2.1754	2.1684	2.1532

표 6: 실험 결과 : Case 1(baseline), Case 2(투자기술 변동성만 존재), Case 3(중립기술 변동성만 존재)의 경우 후생 이득 (λ)과 안정화된 시스템에서 거시변수들의 무조건적 평균(Unconditional Mean) - 2차 및 3차 섭동법 사용

		Case 1(baseline)		Case 4		Case 5	
		$\sigma=2$	$\sigma=4$	$\sigma=2$	$\sigma=4$	$\sigma=2$	$\sigma=4$
λ (%)	2차	-0.0458	-0.1701	-0.0460	-0.1710	-0.0455	-0.1694
	3차	-0.0459	-0.1688	-0.0467	-0.1703	-0.0455	-0.1697

표 7: 실험 결과 : Case 1(baseline), Case 4(중립기술트렌드 2배 증가), Case 5(투자기술트렌드 2배 증가)의 경우 후생 이득 (λ) 비교 - 2차 및 3차 섭동법 사용

후생비용은 공급 측면 기술충격 성장률의 평균 및 표준편차, 수요측면 기술충격 성장률의 평균 및 표준편차, 경제주체의 위험회피계수의 정도에 따라 변동됨을 논증하였다. 특히 대표적 소비자(Representative Consumer)의 위험회피계수가 4인 경우, Barro(2009)가 제시한 통상적 거시안정화 정책의 후생편익과 근사함을 보였다.

여기서 주목해야할 점은 첫째, 재난적 위기위험에 노출된 Barro(2009) 경

제의 후생편익과 본고에서와 같이 재난적 위기위험이 경제주체의 정보집합에서 삭제됨으로써 합리적 기대에 고려되지 않는 경제에서의 후생편익이 근사하다는 것은, 재난적 위기 위험은 위험자산 프리미엄에 주로 반영될 뿐 실물 경제의 경기변동위험과는 무관함을 암시한다. 둘째, 본고의 후생비용 추정에 따르면, 2007년 ‘대침체(Great Recession)’ 이후 경기변동의 후생비용은 1982년 이전의 경기 후생비용보다 낮음을 함의한다. 이러한 함의는 경제가 균형성장경로에서 벗어나지 않는 이상, 또한 합리적 경제주체가 균형성장경로에 따라 경제가 성장할 것이라고 ‘합리적’으로 기대하는 이상, 거시안정화 정책의 후생편익은 작다는 Lucas(1987)의 결론과 일맥상통한다고 볼 수 있다. 따라서 2007년 대침체 이후 시행된 다양한 거시안정화 정책의 남용 여부에 관해 신중한 사려가 있어야 함을 함의한다. 셋째, 여기에서 추정된 후생편익은 정부 거시안정화 정책으로 인해 얻는 후생편익의 최대값임을 주지해야 할 것이다. 따라서 실제 시행되는 거시안정화 정책의 후생편익은 더 작다는 것을 함의한다. 물론 본고에서 고려된 경제는 시장의 마찰이 존재하지 않으므로, 시장의 마찰적 요인을 고려하면 후생편익은 과소추정된 것으로 볼 수 있다. 그러나 시장의 대표적 마찰적 요인 중 하나인 금융시장의 비완비성(market incompleteness)을 고려하더라도, 금융시장의 비완비성으로 인한 후생손실의 효과는 미미함이 Levine and Zame(2002)에 의해 이론적으로 규명되어 있다. 따라서 시장의 마찰적 요인이 거시안정화 정책의 후생편익을 증대시킨다고 확정적으로 결론 내리는 데 신중을 기해야 할 것이다.

참고문헌

- Andreasen, Martin M. (2012). “On the Effects of Rare Disasters and Uncertainty Shocks for Risk Premia in Non-linear DSGE Models.” *Review of Economic Dynamics* 15: 295-316.
- Barro, Robert J. (2006). “Rare Disasters and Asset Markets in the Twentieth Century.” *Quarterly Journal of Economics* 121(3): 823-66.
- Barro, Robert J. (2009). “Rare Disasters, Asset Prices, and Welfare Costs.” *American Economic Review* 99(1): 243-264.
- Cho, J.O., Cooley, T.F. and H. S. E. Kim. (2014). “Business Cycle Uncertainty and Economic Welfare.” *Review of Economic Dynamics* 18(2): 185-200.
- Christiano, Lawrence J and Fisher, Jonas D.M. (1998). “Stock market and investment good prices.” Working paper series WP 98-6 Federal Reserve Bank of Chicago.
- Cooley, Thomas F. (1995). *Frontiers of Business Cycle Research*. Princeton University Press.
- Fisher, Jonas DM. (2006). “The Dynamic Effects of Neutral and Investment-specific Technology Shocks.” *Journal of Political Economy* 114(3): 413-451.
- Greenwood, Jeremy, Zvi Hercowitz, and Per Krusell. (2000). “The Role of Investment-specific Technological Change in the Business Cycle.” *European Economic Review* 44(1): 91-115.
- J. Fernández-Villaverde, J.F. Rubio-Ramírez and F. Schorfheide. (2016). “Solution and Estimation Methods for DSGE Models,” in *Handbook of Macroeconomics*. North-Holland.
- Kim, J., and S. Kim. (2003). “Spurious Welfare Reversals in International Business Cycle Model.” *Journal of International Economics* 60 : 471-500.
- King, Robert G., Charles I. Plosser, and Sergio T. Rebelo. (1988). “Production, Growth and Business Cycles: I. The Basic Neoclassical Model.” *Journal of Monetary Economics* 21(2) : 195-232.

- King, Robert G., Charles I. Plosser, and Sergio T. Rebelo. (2002). "Production, Growth and Business Cycles: Technical Appendix." *Computational Economics* 20(1): 87-116.
- Krusell, Per and Anthony A. Smith, Jr. (1999). "On the Welfare Effects of Eliminating Business Cycles." *Review of Economic Dynamics* 2(1): 245-272.
- Krusell, Per and Anthony A. Smith, Jr. (2002). "Revisiting the Welfare Effects of Eliminating Business Cycles." mimeo, University of Rochester and Carnegie Mellon University.
- Krusell, Per, Toshihiko Mukoyama, Aysegul Sahin, and Anthony A. Smith, Jr. (2009). "Revisiting the Welfare Effects of Eliminating Business Cycles." *Review of Economic Dynamics* 12(3): 393-402.
- Levine, David K. and William R. Zame. (2002). "Does Market Incompleteness Matter?" *Econometrica* 70: 1805-1839.
- Lucas, Robert. (1987). *Models of Business Cycles*. Basil Blackwell.
- Schmitt-Grohé, Stephanie, and Martin Uribe. (2004). "Solving Dynamic General Equilibrium Models Using a Second-order Approximation to the Policy Function." *Journal of economic dynamics and control* 28(4): 755-775.